

## Расчет внутреннего давления в цилиндрической поре

М. И. Алымов, С. И. Аверин, А. Б. Анкудинов

Предложен способ расчета внутреннего давления в цилиндрической поре, возникшей в материале изделия, изготовленном по технологиям порошковой металлургии. Давление в поре определяют по перемещениям внешней поверхности при приложении к изделию внешней нагрузки. При этом использованы известные решения задачи теории упругости о деформации цилиндрической полости, расположенной в центре полой трубы и некоторые физические зависимости.

**Ключевые слова:** давление в поре, теория упругости, теоретический расчет, пористый материал, порошковая металлургия.

DOI: 10.30791/1028-978X-2022-12-76-81

### Введение

Методы порошковой металлургии и аддитивной технологии позволяют изготавливать металлические и керамические изделия сложной формы [1 – 3]. На эксплуатационные характеристики этих изделий влияют размер, форма и ориентация пор, а также давление газа внутри закрытых пор. Наличие давления в порах, значительно снижает прочность изделий и может привести к браку или даже разрушению [4 – 9]. Актуальной является разработка экспериментально-расчетного метода измерения давления газа внутри закрытых пор в порошковых прессовках, литых или полученных по аддитивной технологии заготовках и изделиях. Определение давления газа в порах позволит адекватно оценивать и прогнозировать прочностные свойства изделия в целом.

В работе [10] показано, что можно рассчитать внутреннее давление газа внутри шара, зная перемещение внешней поверхности шара при приложении к нему внешнего давления. В медицине используется тонометрия — это процедура, которую офтальмологи выполняют для определения внутриглазного давления, давления жидкости внутри глаза. Это важный тест при оценке пациентов с риском развития глаукомы. В аппланационной тонометрии внутриглазное давление определяется исходя из усилия, необходимого для образования

плоской поверхности (applanate) заданной площади роговицы [11, 12].

В данной работе представлены результаты исследования по определению внутреннего давления газа в образце в виде глухой трубы с днищами. Для этого к образцу прикладывали внешнюю осевую нагрузку и измеряли перемещения внешней поверхности образца.

Цель работы — разработка метода расчета давления газа в цилиндрической поре.

### Постановка и решение задачи

Рассмотрим цилиндр с внутренним радиусом  $a$ , внешним радиусом  $b$  и высотой  $h$ , находящийся под действием внутреннего давления  $p$  и внешней осевой распределенной нагрузки  $N$  (рис. 1). Радиальное перемещение произвольно взятой точки цилиндра  $u_r$  является функцией текущего радиуса  $r$  и не изменяется по длине цилиндра. Будем решать задачу в цилиндрической системе координат. За положительное направление для  $r$  примем направление от оси цилиндра. Что касается перемещений вдоль оси, то будем считать, что они возникают только как следствие общего удлинения или укорочения цилиндра. Если осевые перемещения существуют, то они распределены так, что поперечные сечения цилиндра остаются плоскими.

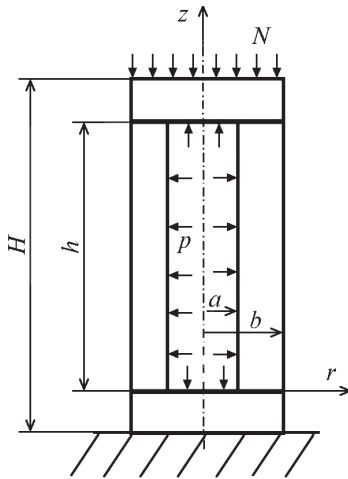


Рис. 1. Схема нагрузки и обозначения.

Fig. 1. Load and designations.

Цилиндр следует считать толстостенным, если толщина стенки больше одной десятой среднего радиуса цилиндра, то есть выполняется условие

$$\frac{2(b-a)}{b+a} > \frac{1}{10}.$$

При этом надо еще учесть, что если цилиндр имеет днище, то в нем возникает осевая растягивающая сила, равная  $p\pi a^2 + N\pi b^2$ . Здесь  $p$  имеет знак плюс, а  $N$  знак минус. Осевое напряжение  $\sigma_z$  будет следующим:

$$\sigma_z = \frac{pa^2 + Nb^2}{b^2 - a^2}.$$

Длину цилиндра  $h$  при этом предполагают достаточно большой для того, чтобы можно было считать, что напряжение  $\sigma_z$  распределено по поперечному сечению равномерно и что удерживающее влияние днищ на радиальные перемещения цилиндра мало.

Тогда для радиальных перемещений  $u_r$  можно записать [13]

$$u_r = \frac{(1-\nu)pa^2}{E(b^2 - a^2)}r + \frac{pa^2b^2}{E(b^2 - a^2)r} - \frac{\nu\sigma_z r}{E}$$

или с учетом выражения для  $\sigma_z$

$$u_r = \frac{(1-\nu)pa^2}{E(b^2 - a^2)}r + \frac{(1+\nu)pa^2b^2}{E(b^2 - a^2)r} -$$

$$\frac{\nu(pa^2 + Nb^2)r}{E(b^2 - a^2)},$$

где  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Деформация  $\epsilon_z$ , определенная из обобщенного закона Гука в этом случае равна

$$\epsilon_z = \frac{(1-2\nu)pa^2 + Nb^2}{E(b^2 - a^2)}.$$

И следовательно изменение высоты цилиндра  $\Delta h$  определяется формулой

$$\Delta h = \frac{[(1-2\nu)pa^2 + Nb^2]h}{E(b^2 - a^2)}.$$

### Определение внутреннего давления газа внутри цилиндра

Будем решать задачу определения внутреннего давления газа внутри цилиндра. У нас есть цилиндр с днищами нагруженный внутренним давлением  $p$ , которое нам не известно и нужно его определить. Мы можем измерить внешний радиус цилиндра и пусть мы каким-то образом посчитали или измерили внутренний радиус цилиндра (радиус поры) и высоту цилиндра (поры) после приложения внутреннего давления, то есть  $a$ ,  $b$  и  $h$  известны. Чтобы определить внутреннее давление  $p$ , приложим к образцу осевую распределенную нагрузку  $N$ . Если бы давления внутри цилиндра не было, то изменение высоты цилиндра  $h$  и радиусов  $a$ ,  $b$  было бы равно

$$\Delta h_0 = \frac{Nb^2h}{E(b^2 - a^2)},$$

$$\Delta a_0 = \frac{-\nu Nb^2a}{E(b^2 - a^2)},$$

$$\Delta b_0 = \frac{-\nu Nb^3}{E(b^2 - a^2)}.$$

В реальности изменение  $\Delta h$  будет определяться внешней нагрузкой  $N$  и добавочным внутренним давлением  $\Delta p$ , обусловленным законом Бойля – Мариотта

$$\Delta h = \frac{[(1-2\nu)\Delta pa^2 + Nb^2]h}{E(b^2 - a^2)} =$$

$$= \Delta h_0 + \frac{(1-2\nu)\Delta pa^2h}{E(b^2 - a^2)},$$

где  $\Delta h$  можно измерить,  $\Delta h_0$  рассчитать и следовательно определить  $\Delta p$

$$\Delta p = \frac{(\Delta h - \Delta h_0)E(b^2 - a^2)}{(1-2\nu)a^2h} =$$

$$= \frac{E}{(1-2\nu)} \left( \frac{b^2}{a^2} - 1 \right) \left( \frac{\Delta h - \Delta h_0}{h} \right).$$

Теперь, зная  $\Delta p$ , можем определить изменение внутреннего радиуса

$$\Delta a = \frac{(1-\nu)\Delta p a^3}{E(b^2-a^2)} + \frac{(1+\nu)\Delta p a b^2}{E(b^2-a^2)} - \frac{\nu(\Delta p a^3 + N b^2 a)}{E(b^2-a^2)},$$

$$\Delta a = \Delta a_0 + \frac{\Delta p a^3}{E(b^2-a^2)} \left[ (1-2\nu) + (1+\nu) \frac{b^2}{a^2} \right].$$

Для определения давления  $p$  воспользуемся формулой Бойля – Мариотта, предполагая, что

процесс приложения внешней осевой нагрузки является изотермическим

$$pV = \text{const},$$

$$p\pi a^2 h = (p + \Delta p)\pi(a + \Delta a)^2 (h + \Delta h).$$

Окончательно получим формулу для определения искомого внутреннего давления

$$p = \frac{\Delta p (a + \Delta a)^2 (h + \Delta h)}{a^2 h \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\Delta a}{a} \right)^2 \left( 1 + \frac{\Delta h}{h} \right) \right]}.$$

Аналогичное выражение можно получить, измеряя только изменение внешнего радиуса цилиндра

$$\Delta b = \frac{(1-\nu)\Delta p a^2 b}{E(b^2-a^2)} + \frac{(1+\nu)\Delta p a^2 b}{E(b^2-a^2)} -$$

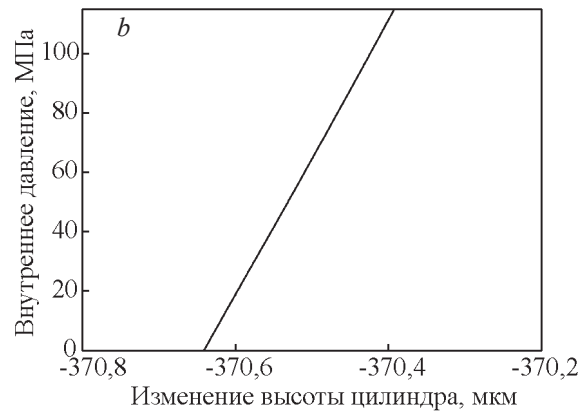
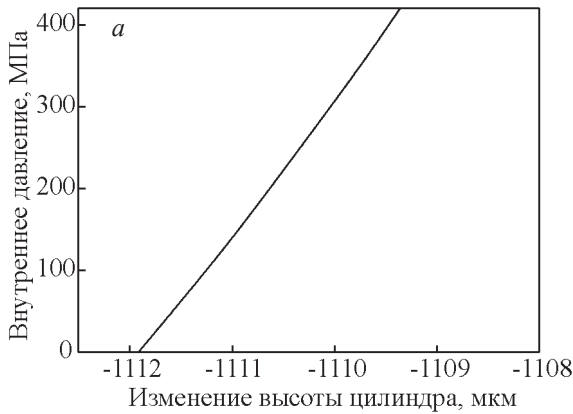


Рис. 2. Зависимость внутреннего давления  $p$  от изменения высоты  $\Delta h$  цилиндра из алюминия. Внешняя распределенная нагрузка:  $a$  — 3 МПа,  $b$  — 1 МПа.

Fig. 2. Dependence of the internal pressure  $p$  on the change height  $\Delta h$  of an aluminum cylinder. External distributed load:  $a$  — 3 MPa,  $b$  — 1 MPa.

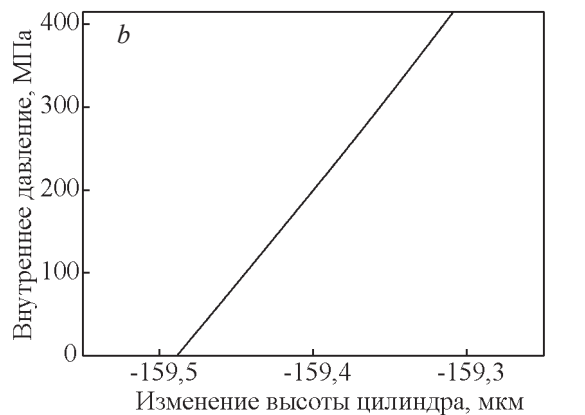
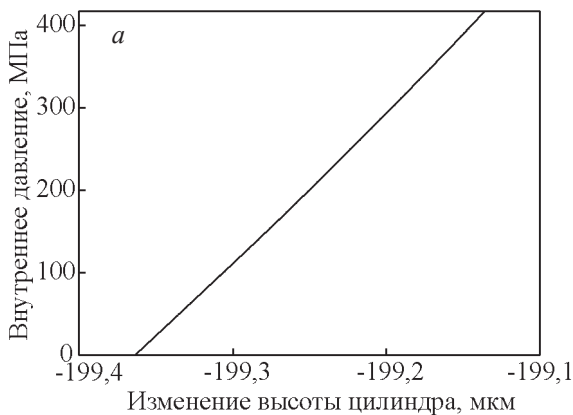


Рис. 3. Зависимость внутреннего давления  $p$  от изменения высоты  $\Delta h$  цилиндра из меди. Внешняя распределенная нагрузка:  $a$  — 1 МПа,  $b$  — 0,8 МПа.

Fig. 3. Dependence of the internal pressure  $p$  on the change height  $\Delta h$  of a copper cylinder. External distributed load:  $a$  — 1 MPa,  $b$  — 0.8 MPa.

$$-\frac{\nu(\Delta p a^2 b + N b^3)}{E(b^2 - a^2)},$$

$$\Delta b = \Delta b_0 + \frac{(2 - \nu)\Delta p a^2 b}{E(b^2 - a^2)}.$$

Измерив  $\Delta b$  и рассчитав  $\Delta b_0$  определяем  $\Delta p$

$$\Delta p = \frac{(\Delta b - \Delta b_0)E(b^2 - a^2)}{(2 - \nu)a^2 b},$$

А затем, зная  $\Delta p$ , аналогично определяем  $\Delta h$ ,  $\Delta a$  и искомое значение  $p$ .

На рис. 2, 3 приведены расчетные графики зависимости внутреннего давления в поре  $p$ , в зависимости от изменения высоты цилиндра  $\Delta h$  для алюминия и меди. Механические свойства материалов приведены в [14]. Для расчета был взят цилиндр диаметром 30 см, с толщиной стенки 1,5 см и длиной 50 см. Для каждого материала приведены результаты для различных внешних нагрузок. Прикладываемую внешнюю нагрузку выбирали с учетом соответствия упругому нагружению из условия  $\sigma_{\text{экв}} \leq \sigma_{0,2}$ .

## Выводы

Предложен способ расчета внутреннего давления газа в поре.

Задача сводится к расчету давления внутри цилиндра с днищами.

Показано, что, прикладывая внешнюю нагрузку и измеряя перемещения внешней поверхности цилиндра, можно рассчитать неизвестное давление газа внутри цилиндра.

*Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-19-00126).*

## Литература

1. Рудской А.И., Попович А.А. Функционально-градиентные материалы и аддитивные технологии их получения. Санкт-Петербург, Изд. Политех-Пресс, 2022, 360 с.
2. Li J., Cui X., Hooper G.J., Lim K.S., Woodfield T.B.F. Rational design, bio-functionalization and biological performance of hybrid additive manufactured titanium implants for orthopedic applications: A review. Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials, 2020, v. 105, art. N 103671.

3. Jibowu T.A. Review on nanoporous metals. Frontiers in Nanoscience and Nanotechnology, 2016, v. 2(4), pp. 165 – 168.
4. Морозов Е.М., Алымов М.И. Разрушающее давление в микродефектах консолидированных материалов. Доклады Российской академии наук. Химия, науки о материалах, 2021, т. 501, № 6, с. 56 – 58. DOI: 10.31857/S2686953521060091.
5. Luo S.D., Liu B., Tian J., Qian M. Sintering of titanium in argon and vacuum: Pore evolution and mechanical properties. International Journal of Refractory Metals and Hard Materials, 2020, v. 90, art. 105226.
6. Пучка О.В., Вайсера С.С. К вопросу о повышении прочности пористых материалов. Научно-технологические и инновационные технологии: Сб. трудов Международ. науч.-практич. конф. Белгород, 6 – 7 октября 2016 г. Белгород, БелГТУ, 2016, с. 332 – 337.
7. Pavlenko A., Koshlak H., Cheilytko A., Nosov M. Study of the formation of gas-vapor in the liquid mixture. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2016, v. 4, no. 5(82), pp. 58 – 65. DOI: 10.15587/1729-4061.2016.75428
8. Ronneberg T., Davies C.M., Hooper P.A. Revealing relationships between porosity, microstructure and mechanical properties of laser powder bed fusion 316L stainless steel through heat treatment. Materials & Design, 2020, v. 189, art. 108481.
9. Lopez-Pamies O., Castaneda P.P., Idiart M.I. Effects of internal pore pressure on closed-cell elastomeric foams. International Journal of Solids and Structures, 2012, v. 49, no. 19 – 20, pp. 2793 – 2798.
10. Алымов М.И., Аверин С.И., Морозов Е.М., Сайков И.В., Галиев Ф.Ф. Определение давления внутри пор. Заводская лаборатория. Диагностика материалов, 2021, т. 87, № 10, с. 40 – 43. DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2021-87-10-40-43>
11. Астахов Ю.С., Акопов Е.Л., Потемкин В.В. Аппланационная и динамическая контурная тонометрия: сравнительный анализ. Офтальмологические ведомости. 2008, т. 1, № 1, с. 4 – 10.
12. Chakrabarty L. Goldman applanation tonometry versus non-contact tonometry: a comparative study. International Journal of Research in Medical Sciences. 2016, v. 4, iss. 11, pp. 4683 – 4687. DOI: <http://dx.doi.org/10.18203/2320-6012.ijrms20163547>
13. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. Москва, Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2018, 542 с.
14. Бобылев А.В. Механические и технологические свойства металлов. Москва, Изд. Металлургия, 1987, 208 с.

## References

1. Rudskoy A.I., Popovich A.A. Funktsional'no-gradiyentnyye materialy i additivnyye tekhnologii ikh polucheniya [Functionally graded materials and additive technologies for their production]. St. Petersburg, Polytech-Press, 2022, 360 p. (In Russ.).

2. Li J., Cui X., Hooper G.J., Lim K.S., Woodfield T.B.F. Rational design, bio-functionalization and biological performance of hybrid additive manufactured titanium implants for orthopedic applications: A review. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2020, v. 105, art. 103671.
3. Jibowu T.A. Review on nanoporous metals. *Frontiers in Nanoscience and Nanotechnology*, 2016, v. 2(4), pp. 165 – 168.
4. Morozov Ye.M., Alymov M.I. Razrushayushcheye davleniye v mikrodefektakh konsolidirovannykh materialov [Breaking pressure in microdefects of consolidated materials]. *Doklady Rossiyskoy akademii nauk. Khimiya, nauki o materialakh* [Reports of Russian Academy of Sciences. Chemistry, Materials Sciences], 2021, v. 501, no. 6, pp. 56 – 58. (In Russ.).
5. Luo S.D., Liu B., Tian J., Qian M. Sintering of titanium in argon and vacuum: Pore evolution and mechanical properties. *International Journal of Refractory Metals and Hard Materials*, 2020, v. 90, art. 105226.
6. Puchka O.V., Vaysera S.S. K voprosu o povyshenii prochnosti poristyykh materialov [On the issue of increasing the strength of porous materials]. *Naukoyemkiye tekhnologii i innovatsii: Sbornik trudov Mezhdunarod. nauch.-praktich. konf. [Science-intensive technologies and innovations: Proceedings of the International. scientific-practical. conf.]*. Belgorod, BelGTU, 2016, pp. 332 – 337. (In Russ.).
7. Pavlenko A., Koshlak H., Cheilytko A., Nosov M. Study of the formation of gas-vapor in the liquid mixture. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2016, v. 4, no. 5(82), pp. 58–65. DOI: 10.15587/1729-4061.2016.75428
8. Ronneberg T., Davies C.M., Hooper P.A. Revealing relationships between porosity, microstructure and mechanical properties of laser powder bed fusion 316L stainless steel through heat treatment. *Materials & Design*, 2020, v. 189, art. 108481.
9. Lopez-Pamies O., Castaneda P.P., Idiart M.I. Effects of internal pore pressure on closed-cell elastomeric foams. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, v. 49, no. 19 – 20, pp. 2793 – 2798.
10. Alymov M.I., Averin S.I., Morozov Ye.M., Saykov I.V., Galiyev F.F. Opredeleniye davleniya vnutri por [Determination of pressure inside the pores]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov* [Industrial Laboratory. Diagnostics of materials], 2021, v. 87, no. 10, pp. 40 – 43. (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2021-87-10-40-43>
11. Astakhov Yu.S., Akopov Ye.L., Potemkin V.V. Applanatsionnaya i dinamicheskaya kon-turnaya tonometriya: sravnitel'nyy analiz [Applanation and dynamic contour tonometry: a comparative analysis]. *Oftal'mologicheskiye vedomosti* [Ophthalmological records], 2008, v. 1, no. 1, pp. 4 – 10. (In Russ.).
12. Chakrabarty L. Goldmann applanation tonometry versus non-contact tonometry: a comparative study. *International Journal of Research in Medical Sciences*. 2016, v. 4, iss. 11, pp. 46834 – 4687. DOI: <http://dx.doi.org/10.18203/2320-6012.ijrms20163547>
13. Feodos'yev V.I. Soprotivleniye materialov [Strength of materials]. Moscow, Publishing house of MSTU im. N.E. Bauman, 2018, 542 p. (In Russ.).
14. Bobylev A.V. Mekhanicheskiye i tekhnologicheskiye svoystva metallov [Mechanical and technological properties of metals]. Moscow, Metallurgy, 1987, 208 p. (In Russ.).

*Статья поступила в редакцию — 03.07.2022 г.  
после доработки — 25.07.2022 г.  
принята к публикации — 26.07.2022 г.*

***Алымов Михаил Иванович** — Институт структурной макрокинетики и проблем материаловедения им. А.Г. Мерджанова Российской академии наук (ИСМАН) (142432, Черноголовка, Московская область, ул. Академика Осипьяна, 8), член-корреспондент РАН, директор, специалист в области порошковой металлургии и композиционных материалов. E-mail: [alymov@ism.ac.ru](mailto:alymov@ism.ac.ru).*

***Аверин Сергей Иванович** — Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова Российской академии наук (ИМЕТ РАН) (119334, Москва, Ленинский проспект, 49), научный сотрудник, специалист в области порошковой металлургии. E-mail: [qqzz@mail.ru](mailto:qqzz@mail.ru).*

***Анкудинов Алексей Борисович** — Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова Российской академии наук (ИМЕТ РАН) (119334, Москва, Ленинский проспект, 49), старший научный сотрудник, специалист в области порошковой металлургии. E-mail: [a-58@bk.ru](mailto:a-58@bk.ru).*

## Calculation of internal pressure in a cylindrical pore

M. I. Alymov, S. I. Averin, A. B. Ankudinov

A method for calculating the internal pressure in a cylindrical pore that has arisen in the material of a product made using powder metallurgy technologies is described. A pore with an internal pressure, from certain positions, should be considered as a defect, which, if not removed, then at least from the known pressure inside the pore, certain conclusions can be drawn about the degree of strength reliability of this porous product. In addition, the measured pressure inside the pores allows you to optimize the manufacturing processes of products, control the structure and properties, and avoid the formation of cracks at the boundaries of the particles that make up the material. In this paper, a method is proposed for calculating the pressure in a pore, based on the displacements of the outer surface of the sample, when an external load is applied to the product. In this case, the known solutions of the problem of elasticity theory about the deformation of a spherical cavity located in the center of a spherical hollow ball are used.

**Keywords:** pore gas pressure, theory of elasticity, theoretical calculation, porous material, powder metallurgy.

---

*Alymov Mikhail — Merzhanov Institute of structural macrokinetics and materials science Russian Academy of Sciences (ISMAN) (Academician Osipyan str., 8, Chernogolovka, Moscow Region, 142432, Russia), corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, director, specialist in the field of powder metallurgy and composite materials. E-mail: alymov@ism.ac.ru.*

*Averin Sergei — Baikov Institute of Metallurgy and Materials Science of the Russian Academy of Sciences (IMET RAS) (49 Leninsky prospect, 119334 Moscow, Russia), researcher, specialist in the field of powder metallurgy. E-mail: qqzz@mail.ru.*

*Ankudinov Alexey — Baikov Institute of Metallurgy and Materials Science of the Russian Academy of Sciences (IMET RAS) (49 Leninsky prospect, 119334 Moscow, Russia), senior researcher, specialist in the field of powder metallurgy. E-mail: a-58@bk.ru.*