

# Расчет параметров механических свойств сердечной мышцы

С. А. Муслов, А. И. Лотков, С. Д. Арутюнов, Т. М. Албакова

---

Выполнен обзор исследований механических свойств тканей сердца человека и животных. На основании литературных данных найден вид аппроксимирующей функции для зависимости модуля Юнга желудочков сердца человека от величины деформации. Вычислены средние значения модуля Юнга и другие упругие постоянные, проведено их сравнение с известными экспериментальными значениями. Рассчитаны коэффициенты потенциала деформации  $C_1$  и  $C_2$  в двухпараметрической гиперупругой модели Муни – Ривлина миокарда.

**Ключевые слова:** механические свойства, модуль Юнга, гиперупругая модель Муни – Ривлина, сердце, миокард.

DOI: 10.30791/1028-978X-2020-12-42-52

---

## Введение

Исследованию механических свойств биологических резервуаров и полых органов, например, желчного пузыря и протоков [1, 2] посвящено достаточно большое число работ. Несомненный интерес для исследователей представляет изучение биомеханики и механических характеристик биологических тканей сердца [3]. В основе развитых подходов и методов решения лежат представления о том, что патология мягких тканей сопровождается изменением деформационных свойств, в частности характеристик упругости и вязкости. Однако в значительной части экспериментальных работ по данной тематике содержится только анализ зависимостей вида “давление – объем”, “сила – длина” и других малосодержательных связей, что затрудняет глубокую интерпретацию экспериментальных данных. Например, в последнем случае можно определить лишь величину жесткости образцов тканей (Н/м). В доступной литературе недостаточно сведений о количественных характеристиках механических свойств, итогов прямых измерений упругих модулей, упругой анизотропии тканей, результатов аппроксимации кривых “напряжение – деформация”. С другой стороны, иногда приведены значения модулей упругости

миокарда человека и животных без указания величины деформаций, при которых они получены, несмотря на то, что механические свойства мягких биологических тканей являются вязкоупругими, а модуль Юнга дифференциальным. Достоверность и воспроизводимость данных различных исследований оставляет желать лучшего. В ряде случаев анализ экспериментальных данных затрудняется тем, что мягкие биологические ткани являются неоднородными, неізотропными, физически нелинейными и физиологически активными [4]. Тем не менее, любые знания, в частности, деформационных и прочностных свойств тканей, например, желудочков и клапанов сердца, необходимы для прогнозирования развития возможных осложнений при хирургических реконструктивных вмешательствах, проводимых на сердце, а решение задач теории упругости помогают преодолеть проблемы диагностики патологий мягких биологических тканей.

В [5] отмечено, что в настоящее время отсутствуют математические модели для описания связи между структурной организацией ткани и ее вязкоупругими свойствами. Представлена реологическая модель, описывающая вязкоупругие свойства морфофункциональной единицы миокарда. В этой работе определены коэффициенты вязкости и

упругости структурных элементов модели. Однако, несмотря на то, что проведено сопоставление результатов моделирования и экспериментальных данных, остаются неясными численные значения и единицы измерения упругих и вязких компонентов модели пассивной папиллярной мышцы правого желудочка крысы.

В работе [6] были получены одни из первых данных о механических характеристиках интактных мышечных волокон скелетных и сердечной мышц кролика. Для клеток сердечной мышцы модуль Юнга составил  $E = 100,3 \pm 10,7$  кПа, а для клеток скелетных мышц  $E = 24,7 \pm 3,5$  кПа. Таким образом, более жесткими являются волокна сердечной мышцы, что, по мнению авторов, обусловлено ее постоянной ритмической активностью.

Сравнение значений, найденных для модуля Юнга тканей интактного сердца, затруднено тем, что используемые методы сильно отличаются друг от друга. Тем не менее классические значения для  $E$  мышц сердца, полученные при посмертных измерениях, варьируются в диапазоне  $(0,3 - 5) \cdot 10^4$  Н/м<sup>2</sup>. Как правило, исследования проводили на изолированных волокнах сердечной мышцы, при этом упругий модуль на сжатие оказывался в десятки раз выше [7]. В [8] приведены результаты измерения “систолического модуля”  $(2 - 4) \cdot 10^5$  Н/м<sup>2</sup> у собак с открытой грудью, используя метод искусственно созданного объемного возмущения и измерения соответствующих значений давления. Схожие по величине значения упругого модуля были получены в [9] в опытах на экспериментальных животных.

В работах [10, 11] методами атомно-силовой микроскопии (АСМ) изучены структуры и поперечная жесткость отдельных миофибрилл, выделенных из мышечных волокон сердечной и скелетной мышц молодых кроликов и новорожденных крыс. Методика измерения поперечной жесткости была стандартной, глубина продавливания составляла 25 – 30 нм. Измерения поперечной жесткости авторы проводили в расслабляющем и ригорном растворах. Z-линия миофибрилл скелетных мышц в ригорном растворе имела жесткость 7,7 пН/нм, а сердечной мышцы — 25,8 пН/нм, соответственно. Жесткость миофибриллы сердечной мышцы в ригорном растворе в районе M-линии была 11 пН/нм. В расслабляющем растворе жесткость миофибрилл скелетных мышц была достаточно однородной и составляла в среднем 3 пН/нм, в отличие от миофибрилл сердечной мышцы, где жесткость менялась в диапазоне 4 – 11 пН/нм. Используя решение контактной задачи Герца, авторы рассчитали модуль Юнга одиночных миофибрилл, который составил

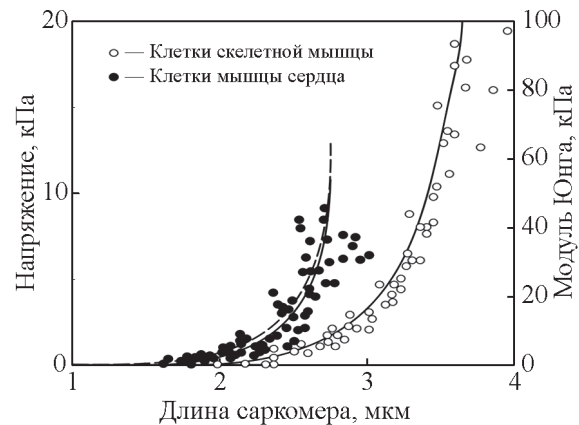


Рис. 1. Составные данные напряжение – длина для восьми миоцитов сердца и пяти миоцитов скелетной мышцы [12]. Зависимость, изображенная пунктирной линией, — дифференциальный модуль Юнга миоцитов сердца, рассчитанный в Mathcad 15.0.

Fig. 1. Composite data stress-length for eight cardiac myocytes and five skeletal muscle myocytes [12]. Dotted line is the differential Young's modulus of cardiac myocytes calculated in Mathcad 15.0.

в состоянии ригора 61 кПа для скелетных мышц и 145 кПа для сердечной мышцы, а в состоянии расслабления — 5 кПа для миофибрилл скелетных мышц и 61 кПа — для сердечной мышцы.

В [12] исследованы биомеханические свойства изолированных миоцитов левого желудочка самцов золотистых сирийских хомячков (2 – 5 месяцев, массой 100 – 300 г). Миоциты — особый тип клеток, составляющий основную часть мышечной ткани. Соотношение механического напряжения и длины саркомера миоцитов сердца и скелетной мышцы представлено на рис. 1.

В работе [13], при рассмотрении тканей сердца последовательно как изотропную, несжимаемую трансверсально ортотропную и сжимаемую трансверсально ортотропную среду приведены данные интактного миокарда собаки, полученные методом статических механических испытаний (табл. 1) [14, 15] и об упругих постоянных миокарда человека, фиксированного формалином, полученные ультразвуковым методом (табл. 2) [16 – 19].

Переменные  $Q_1$  и  $Q_2$  — комбинация модулей (табл. 1) определены как:

$$Q_1 = C_{13} - \lambda, \quad Q_2 = C_{33} - (\lambda + 2\mu)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — постоянные Ламе:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)},$$

Таблица 1

Пассивные упругие модули миокарда сердца собаки, оцененные путем прямых механических испытаний. Модель несжимаемой среды (адаптировано [14, 15])

Table 1

Passive elastic modules of the dog's heart myocardium evaluated by direct mechanical tests. The model of an incompressible medium (adapted from [14, 15])

Пассивные упругие модули	Значение модуля, кПа
$Q_1$	0
$Q_2$	13,1
$\mu_{13}$	3,2
$\mu$	1,4

Таблица 2

Пассивные упругие модули миокарда сердца собаки, оцененные путем ультразвуковых измерений. Модель сжимаемой среды (адаптировано [16 – 19])

Table 2

Passive elastic modules of the dog's heart myocardium evaluated by ultrasound measurements. Compressible medium model (adapted [16 – 19])

Пассивные упругие модули	Значение модуля, ГПа
$C_{11}$	2,462
$C_{33}$	2,527
$C_{13}$	2,445
$C_{44}$	$9,0 \cdot 10^{-3}$
$C_{66}$	$8,5 \cdot 10^{-3}$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$E$  — модуль упругости Юнга,  $\nu$  — коэффициент поперечной деформации (Пуассона),  $\mu_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2\varepsilon_{13}} = \frac{\sigma_{23}}{2\varepsilon_{23}}$  — одно из соотношений напряжение – деформация для несжимаемой трансверсальной ортотропной среды.

Следует обратить внимание на значительные расхождения в численных значениях данных. Действительно на основании данных табл. 2

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{13} - \lambda = C_{13} - C_{11} + C_{66} = \\ &= 2,445 - 2,462 + 0,0085 \text{ ГПа} = \\ &= -0,0085 \text{ ГПа} = -8,5 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= C_{33} - C_{11} = 2,527 - 2,462 \text{ ГПа} = \\ &= 0,065 \text{ ГПа} = 65,00 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

то есть  $Q_1$  отрицательна. Тем не менее в [13] на основании и тех, и других результатов исследования пассивных механических свойств тканей сердца сделано предположение должны, что модули упругости должны быть порядка от 10 до 20 кПа.

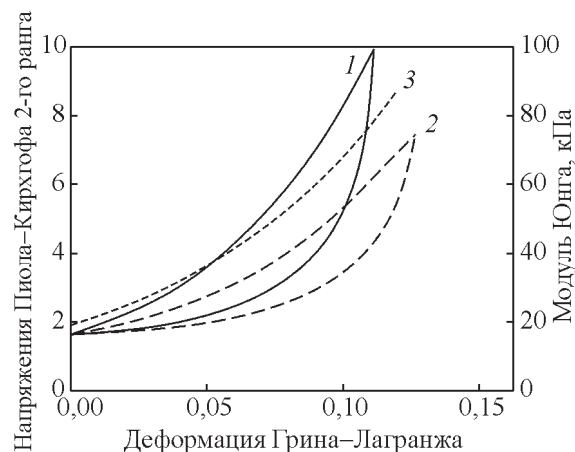


Рис. 2. Нелинейное вязкоупругое поведение образцов, изготовленных из сердечной мышцы. Образцы подвергали одинаковой деформации в направлении волокон и перпендикулярно им. На рисунке показаны напряжения  $s_{33}$  как функция деформации Грина – Лагранжа волокон  $E_{33}$  для различных скоростей деформации: 1 —  $0,05 \text{ с}^{-1}$ , 2 —  $0,0005 \text{ с}^{-1}$  [21], 3 — дифференциальный модуль Юнга, рассчитанный в Mathcad 15.0

Fig. 2. Nonlinear viscoelastic behavior of samples in the form of strips made from heart muscle. The samples were subjected to the same deformation in the direction of the fibers and perpendicular to them. The figure shows the stress  $s_{33}$  as a function of the Green-Lagrange strain of fibers  $E_{33}$  for different strain rates: 1 —  $0.05 \text{ s}^{-1}$ , 2 —  $0.0005 \text{ s}^{-1}$  [21], 3 — the differential Young's modulus, calculated in Mathcad 15.0.

В работе [21] с использованием данных [20] охарактеризована ткань миокарда как сильно нелинейный вязкоупругий материал (рис. 2).

Предложенная в [21] вязкоупругая модель хорошо согласуется с экспериментальными данными (рис. 3) и дает следующую аппроксимирующую опытные данные зависимость  $s_{33} - l^s$ :

$$s_{33} = \left(\frac{l^s}{L^s}\right)^2 c^n a^f \exp\left[\frac{(l^s)^2 - (L^s)^2}{2(L^s)^2}\right],$$

где  $l$  и  $L$  — текущая и начальная длина саркомера,  $a^f$  — жесткость волокон, остальное — параметры модели, описанные в [21].

В [21] рассчитан объемный упругий модуль миокарда  $c^e$ , который определен из уравнения

$$p = c^e \Delta J,$$

где  $p = 0,8 \text{ кПа}$  — внутримиекардиальное давление (intramyocardial pressure),  $\Delta J = 8 \% = 0,08$  — относительное изменение объема. Отсюда  $c^e = 10 \text{ кПа}$ .

В [23] изучено развитие жесткости ткани сердца у мышей. В работе подчеркнуто, что зна-

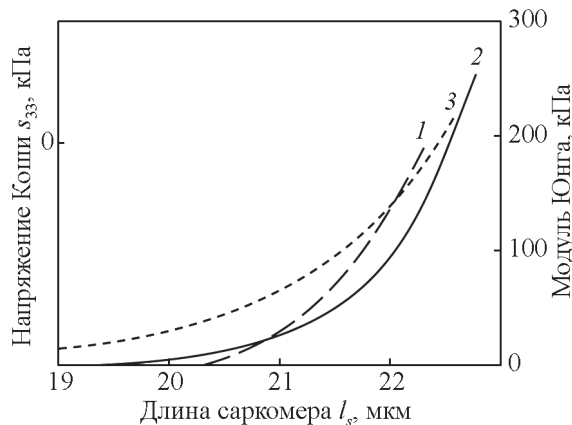


Рис. 3. Усредненные опытные данные [22] для сердечных трабекул 8 крыс (1), расчетная зависимость для мышечных волокон в рамках вязкоупругой модели “напряжение Коши  $s_{33}$  – длина саркомера  $l_s$ ” (2), дифференциальный модуль Юнга, рассчитанный в Mathcad 15.0 (3).

Fig. 3. Averaged experimental data [22] for cardiac trabeculae of 8 rats (1), calculated dependence for muscle fibers in the viscoelastic model “Cauchy stress  $s_{33}$  – sarcomere length  $l_s$ ” (2), the differential Young’s modulus calculated in Mathcad 15.0 (3).

ние жесткости сердца от эмбриональной фазы до послеродового периода важно для лучшего понимания развития структур сердца, а также представляет интерес для целой тканевой инженерии. Для оценки жесткости сердца образцы левого желудочка черных швейцарских мышей разного возраста (эмбриональный, неонатальный и взрослый) были изучены методом атомно-силовой микроскопии (АСМ). Кривые сила – вдавливание были проанализированы, чтобы получить упругую жесткость по модели Герца. Результаты этих экспериментов показали внезапное увеличение жесткости сердца с  $12 \pm 4$  кПа до рождения до  $39 \pm 7$  кПа после рождения. Авторы считают, что эти данные находятся в хорошем соответствии с результатами исследований работы [24] взрослых здоровых крыс Льюиса с использованием техники АСМ:  $18 \pm 2$  кПа.

В [25] тестировали 5 сердец овец и 5 сердец свиней статическим на растяжение и динамическим методами. Образцы помещали в физиологический раствор и испытывали при  $37^\circ\text{C}$ . Было установлено, что циклическая нагрузка приводит к более согласованным между собой значениям упругих модулей. Модуль тканей миокарда овец/свиней был в среднем  $0,05/0,06$  МПа. Стандартное отклонение  $SD = 0,02/0,03$  МПа. Динамический модуль Юнга (накопления)  $E'$ /модуль потерь  $E''$  варьировался от  $0,02/0,003$  МПа при  $0,5$  Гц до

$0,04/0,008$  МПа при  $3,5$  Гц. Как известно, величины  $E'$  и  $E''$  определяют комплексный динамический модуль Юнга  $E^*$  материала, который представляется в виде  $E^* = E' + iE''$ . Жесткость увеличивалась линейно от  $400$  до  $800$  Н/м с  $\text{tg}\delta$  около  $0,175$ . В работе [25] отмечено, что количественная оценка механического поведения мягких биологических тканей представляет значительный исследовательский интерес, однако есть необходимость стандартизировать исследования, в том числе механические испытания биологических тканей.

В работе [26] проведены исследования биомеханических характеристик желудочков сердца человека. Материалом для исследования послужили 80 сердец, изъятых при аутопсии 80 трупов взрослых людей (40 женщин и 40 мужчин) в возрасте  $31-70$  лет. Испытания выполнили на машине Instron 5944. Был измерен модуль Юнга миокарда в различных возрастных группах и отделах сердца. Были выявлены закономерности возрастной и половой изменчивости упругих и прочностных свойств стенок левого и правого желудочка, межжелудочковой перегородки, характеризующиеся уменьшением их прочности и эластичности с возрастом. Значения модуля Юнга варьировались в широких пределах от  $0,4$  до  $9$  МПа у миокарда левого желудочка, от  $0,1$  до  $2,9$  МПа — правого желудочка и от  $0,1$  до  $2,9$  МПа — межжелудочковой перегородки. Отметим, что этот порядок величин совпадает со значениями модуля Юнга  $1,2 - 5,7$  МПа, полученными в [27] для влажных волокон камбаловидной мышцы при АСМ исследованиях на воздухе. В растворе с релаксирующим действием значения модуля Юнга камбаловидной мышцы уменьшались до  $22 - 115$  кПа. Кроме того, в [26] были получены графические зависимости “напряжение – деформация” для поперечного и продольного направления. К сожалению, в работе не уточнено по отношению к какому направлению эти измерения были проведены. Тем не менее, нам представлялось интересным интерпретировать эти зависимости с целью определения упругих модулей, упругой анизотропии и коэффициентов гиперупругой модели.

### Упругие модули желудочков сердца

На первом этапе экспериментальные кривые [26] были оцифрованы с помощью специализированного приложения GetData Graph Digitizer (рис. 4).

Данные далее были экспортированы в пакет программ для математических вычислений

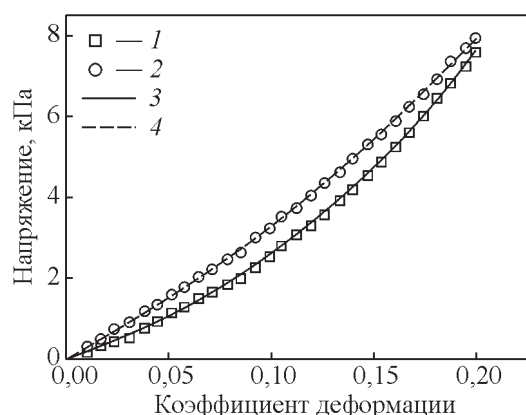


Рис. 4. Оцифрованные экспериментальные кривые [26]: 1 — продольное, 2 — поперечное; и графики теоретических аппроксимирующих зависимостей: 3 — продольное, 4 — поперечное, полученных в MATHCAD с помощью функции *genfit* желудочков сердца человека.

Fig. 4. Digitized experimental curves [26]: 1 — longitudinal, 2 — transverse; and graphs of theoretical approximating dependencies: 3 — longitudinal, 4 — transverse, obtained in MATHCAD using the *genfit* function of human ventricles.

MATHCAD. Полученные массивы были описаны аналитически экспоненциальными зависимостями вида  $\sigma = \alpha(\exp\beta\varepsilon - 1)$ , а коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  определены с помощью функции *genfit*. Функция *genfit* возвращает вектор, содержащий  $n$  параметры, которые обеспечивают наилучшее приближение данных из  $\varepsilon$  и  $\sigma$  функцией  $\sigma(\varepsilon)$ . Данный способ аппроксимации оказался эффективен и показал высокую точность как видно из рис. 4. Упругие модули  $E_1(\varepsilon)$  и  $E_t(\varepsilon)$  затем определялись дифференцированием соответствующих регрессионных зависимостей.

В результате установлено, что в поперечном направлении:  $\sigma_t(\varepsilon) = 7,851 \cdot 10^{-3} \cdot \exp(3,499\varepsilon - 1)$  МПа и  $E_t(\varepsilon) = 0,028 \cdot \exp(3,499\varepsilon)$  МПа, в продольном —  $\sigma_l(\varepsilon) = 2,688 \cdot 10^{-3} \cdot \exp(6,736\varepsilon - 1)$  МПа и  $E_l(\varepsilon) = 0,018 \cdot \exp(6,736\varepsilon)$  МПа. Соответствующие зависимости графики функций приведены на рис. 4 и 5.

Из рис. 5 видно, что модули Юнга желудочков сердца монотонно увеличиваются по мере деформирования тканей: от 0,028 до 0,055 МПа для поперечного направления и от 0,018 до 0,07 МПа для продольного, то есть действительно являются инкрементальными. Средние значения упругих модулей, полученные интегрированием в диапазоне деформаций 0 – 0,2, составили 0,04 и 0,038 МПа,

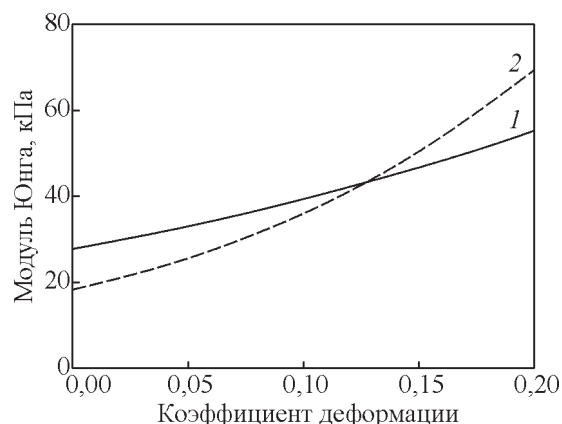


Рис. 5. Дифференциальные модули Юнга желудочков сердца: 1 — в поперечном ( $t$ ), 2 — продольном ( $l$ ) направлениях в зависимости от степени деформации.

Fig. 5. Differential Young modules of the heart ventricles: 1 — in the transverse ( $t$ ), 2 — longitudinal ( $l$ ) directions depending on the degree of deformation.

соответственно, что по порядку величины совпадает с данными, предсказанными в [13]. При этом модуль Юнга в продольном направлении увеличивается быстрее, чем в поперечном, поэтому безразмерный коэффициент упругой анизотропии  $A = 0,66 \cdot \exp(3,237\varepsilon)$ , обычно определяемый как отношение двух модулей, увеличивается от 0,66 при  $\varepsilon = 0$  до 1,26 при  $\varepsilon = 0,2$ . Желудочки сердца упругоизотропны ( $A = 1$ ) при величине относительной деформации  $\varepsilon = 0,13$  (13 %) (рис. 6).

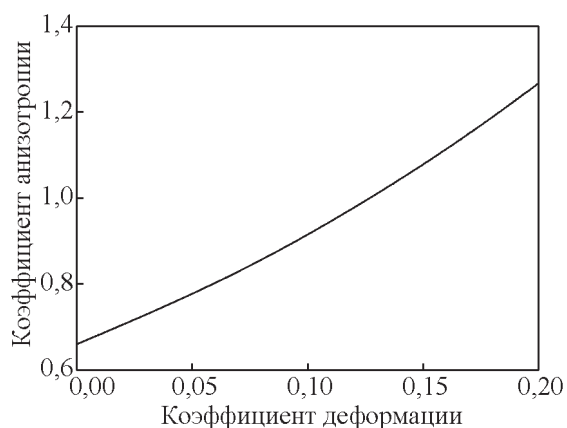


Рис. 6. Коэффициент упругой анизотропии тканей сердца в зависимости от степени деформации.

Fig. 6. The coefficient of elastic anisotropy of the heart tissue depending on the degree.

Таблица 3

Параметры механических свойств тканей сердца по данным кривых нагружения на рис. 1 – 3

Table 3

Parameters of mechanical properties of heart tissues according to the data of loading curves in fig. 1 – 3

Источник	Вид кривой	Модуль Юнга, кПа		Диапазон деформаций	Сжимаемость, МПа <sup>-1</sup>
		Среднее значение*	Максимальное значение		
[12]	$\sigma - l$	12,38	64,95	0 – 0,84	1,2
[21]	$\sigma_{33} - E_{33}$	78,769	170,985	0 – 0,11** (0,05 с <sup>-1</sup> )	0,19
		47,276	95,056	0 – 0,13** (0,0005 с <sup>-1</sup> )	0,32
[22]	$\sigma - l$	95,002	242,499	0 – 0,12	0,16

\*Получено интегрированием в диапазоне деформаций,

\*\*Деформация  $E_{33}$  Грина – Лагранжа.

Учитывая, что коэффициент Пуассона мягких биологических тканей близок к коэффициенту Пуассона несжимаемых материалов (0,5) и принимая его равным 0,4975 [13], можем оценить по величине модули сдвига  $G$  и объемного сжатия  $K$  ткани желудочков: 0,013 и 2,6 МПа, а также их податливость растяжению — 74,87 МПа<sup>-1</sup> и податливость всестороннему сжатию (сжимаемость) 0,38 МПа<sup>-1</sup>.

По аналогичному алгоритму с помощью функции genfit были обработаны кривые на рис. 1 – 3. Результаты вычислений представлены в табл. 3.

Параметры механических свойств тканей сердца, представленные в данной статье, могут быть отображены на графике (рис. 7).

В заключении раздела остановимся на следующем аспекте. Если в качестве примера рассмотреть

прогиб тонкой квадратной пластины, защемленной по контуру, с параметрами: модуль упругости  $E = 40$  кПа, толщина  $h = 10$  мм и сторона  $a = 50$  мм под действием равномерно распределенной нагрузки  $q = 120$  мм рт. ст., то прогиб в центре пластины составит  $w = 28,80$  мм [28], то есть почти в 3 раза больше толщины пластины. Ради объективности следует сказать, что в расчетной формуле предполагалось, что  $w < h$ , кроме того линейные размеры даже левого желудочка при объеме 200 мл меньше использованных при расчете значений  $a$ . Поэтому реальная величина прогиба стенки желудочка существенно меньше.

По данным [29] предел прочности тканей сердца варьируется от 0,4 в радиальном направлении до 2,6 МПа в кольцевом для интактных клапанов сердца, при этом максимальная деформация составляет до 22 % в кольцевом и до 30 % в радиальном направлении, а модуль Юнга — 15 и 2 МПа, соответственно. Как видно ткани клапанов сердца гораздо жестче, чем ткани миокарда (особенно в кольцевом направлении).

Если исключить из анализа данные по экспериментальным объектам с упругими модулями свыше 150 кПа (нетипичные значения, например 400 кПа у систолического модуля собак [8]), тогда получим, что модуль Юнга тканей сердца человека и животных варьируется в пределах ( $M \pm m$ , где  $M$  — среднее значение,  $m$  — ошибка среднего)  $(29,25 \pm 9,42) \div (65,10 \pm 12,74)$  кПа, то есть порядка нескольких десятков кПа и зависит от величины деформации, состояния тканей, объекта исследования, метода измерения и других факторов. Среднее значение модуля Юнга тканей сердца по данным, включенным в анализ  $47,18 \pm 10,07$  МПа. Эти значения очень близки к средним значениям, полученным интегрированием кривых на рис. 5.

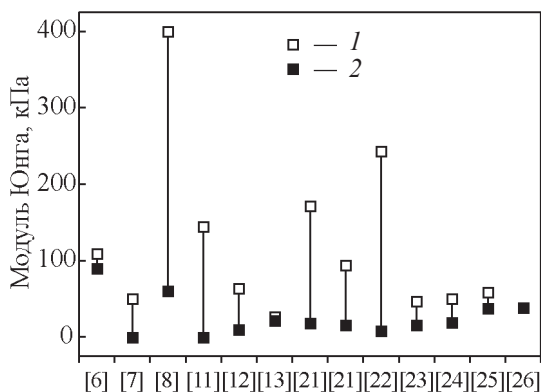


Рис. 7. Модуль Юнга тканей сердца человека и животных: 1 — верхняя граница, 2 — нижняя граница.

Fig. 7. The Young's modulus of the heart tissues of humans and animals: 1 — upper bound, 2 — lower bound.

### Коэффициенты в гиперупругой модели Муни – Ривлина

Одной из основных проблем, возникающей при исследовании мягких биологических тканей — это выбор гиперупругой модели, которая бы наиболее адекватно описывала механическое поведение объекта. По данным [30] для характеристики деформационного поведения сосудов и протоков организма человека рекомендовано использовать феноменологическую полиномиальную модель или модели Муни – Ривлина различных порядков (от двух до девятипараметрической). Последние наиболее точно описывают эмпирические кривые  $\sigma - \lambda$ , где  $\lambda = l/l_0$  — отношение длины образца к его начальной длине при растяжении,  $\epsilon = \lambda - 1$  [31]. Тем более на представленных экспериментальных кривых  $\sigma - \epsilon$  на рис. 4 отсутствует точка перегиба.

В данной работе рассчитаны константы двухпараметрической модели Муни – Ривлина стенки желудочков сердца на основе экспериментальной кривой по результатам механических испытаний на растяжение.

Поведение гиперупругих материалов при растяжении с точки зрения современной механики деформируемого тела может быть описано нелинейной функцией [32]

$$\sigma = 2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) C_1 + 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right), \quad (1)$$

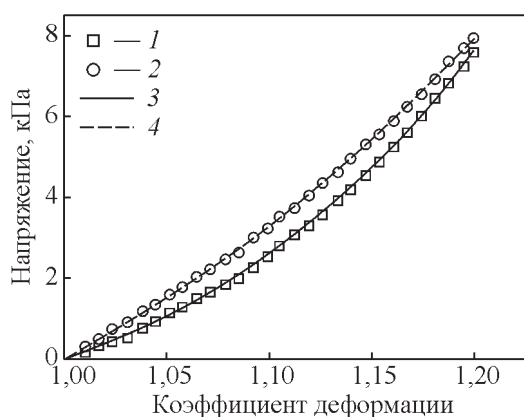


Рис. 8. Оцифрованные экспериментальные кривые: 1 — продольное, 2 — поперечное [26]; графики функции  $\sigma(\lambda)$  уравнения (1) в модели Муни – Ривлина: 3 — продольное, 4 — поперечное.

Fig. 8. Digitized experimental curves: 1 — longitudinal, 2 — transverse [26]; graphs of the function  $\sigma(\lambda)$  (1) in the Mooney – Rivlin model: 3 — solid line-longitudinal, 4 — dotted line-transverse.

материальные константы  $C_1$  и  $C_2$  определяются через потенциал деформации

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3),$$

где  $I_1$  и  $I_2$  — инварианты деформации, равные  $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ ,  $I_2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2}$ ,  $\lambda_i$  — степени деформации,  $i = 1, 2, 3$ . Уравнение (1) — разновидность 2-параметрического феноменологического уравнения Муни – Ривлина.

Анализ проводили в системе компьютерной алгебры MATHCAD с помощью встроенной функции linfit. Величина коэффициентов составила 0,018 и -0,013 МПа для поперечного направления, 0,026 и -0,024 МПа — для продольного. Расчетные кривые  $\sigma(\epsilon)$  в сравнении с экспериментальными данными представлены на рис. 8.

Как видно из рис. 8 модель Муни – Ривлина с найденными коэффициентами  $C_1$  и  $C_2$  потенциала деформации весьма удовлетворительно описывает механическое поведение тканей желудочков сердца, установленное экспериментальным путем.

### Выводы

Разброс данных исследований механических свойств тканей сердца обусловлен в первую очередь различиями в применяемых методах и объектах изучения человека и животных. Расчетные результаты также вариабельны, в частности, вследствие разнообразия реологических моделей, предлагаемых к применению.

Получены аналитические функции вида  $\sigma = \alpha(\exp\beta\epsilon - 1)$  с численными значениями параметров  $\alpha$  и  $\beta$  и аппроксимирующие зависимости дифференциального модуля Юнга желудочков сердца человека от деформации в поперечном и продольном направлениях  $E_t(\epsilon) = 0,028 \cdot \exp(3,499\epsilon)$  МПа и  $E_l(\epsilon) = 0,018 \cdot \exp(6,736\epsilon)$  МПа. Определены средние значения модулей Юнга в интервале растягивающих деформаций от 0 до 20 %: 0,04 и 0,038 МПа, соответственно. Установлено, что модуль Юнга по мере деформирования в продольном направлении увеличивается быстрее, чем в поперечном. Поэтому коэффициент анизотропии  $A = 0,66 \cdot \exp(3,237\epsilon)$  увеличивается от 0,66 при  $\epsilon = 0$  до 1,26 при  $\epsilon = 0,2$ . При  $\epsilon = 0,13$  ткани желудочков сердца упругоизотропны ( $A = 1$ ). Принимая коэффициент Пуассона мягких биологических тканей равным 0,4975, модули сдвига  $G$  и объемного сжатия  $K$  ткани желудочков равны 0,013 и 2,6 МПа, соответственно, а их податливость: на растяжение

— 25,64 МПа<sup>-1</sup>, на сдвиг — 74,87 МПа<sup>-1</sup> и сжимаемость 0,38 МПа<sup>-1</sup>.

В рамках двухпараметрической гиперупругой модели Муни – Ривлина рассчитаны коэффициенты функции энергии деформации желудочков мягких тканей сердца человека  $C_1 = 0,018$  и  $C_2 = -0,013$  МПа для поперечного,  $C_1 = 0,026$  и  $C_2 = -0,024$  МПа — продольного направлений, соответственно.

Модуль Юнга тканей сердца человека и животных варьируется в пределах  $(29,25 \pm 9,42) \div (65,10 \pm 12,74)$  ( $M \pm m$ ) кПа, то есть порядка нескольких десятков кПа и зависит от величины деформации, состояния тканей, объекта исследования, метода измерения и других факторов. Среднее значение модуля Юнга тканей сердца по данным включенным в анализ —  $47,18 \pm 10,07$  МПа.

Полученные в работе численные значения параметров механических свойств помимо фундаментального научного интереса могут быть использованы для анализа напряженно-деформированного состояния тканей отделов сердца при математическом моделировании различных оперативных кардиологических вмешательств. С учетом различий в биомеханических характеристиках мягких тканей сердца, становится возможным рационально подобрать тип материала заплат при жизненно важных реконструктивно-восстановительных операциях на сердце.

*Работа выполнена в соответствии с планом НИР (2017 – 2021 гг.) АААА-А16-116102010059-6 ФГАНУ ЦИТиС (2017 – 2021 гг.) кафедры нормальной физиологии и медицинской физики МГМСУ им. А.И. Евдокимова и в рамках Программы фундаментальных исследований государственных академий наук на 2013 – 2020 годы (приоритетное направление № III.23.2.2).*

## Литература

- Duch B., Andersen H., Gregerson H. Mechanical properties of the porcine bile duct wall. *BioMed. Engineer. Onl.*, 2004, v. 3, no. 23, pp. 1 – 8.
- Муслов С.А., Данилевская О.В. Морфологическое и биомеханическое исследование стенки общего желчного протока на аутопсийном материале. *Хирург*, 2007, № 9, с. 21 – 25.
- Abe H., Hayashi K., Sato M. Eds. *Data book on mechanical properties of living cells, tissues and organs.* Tokyo Springer, 1996, 436 p.
- Сковорода А.Р. Задачи теории упругости в проблеме диагностики патологий мягких биологических тканей. М.: Физматлит, 2006, 232 с.
- Смолюк Л.Т., Проценко Ю.Л. Механические свойства пассивного миокарда: эксперимент и математическая модель. *Биофизика*, 2010, т. 55, № 5, с. 905 – 909.
- Mathur A.B., Collinsworth A.M., Reichert W.M., Kraus W.E., Truskey G.A. Endothelial, cardiac muscle and skeletal muscle exhibit different viscous and elastic properties as determined by atomic force microscopy. *Journal of Biomechanics*, 2001, v. 34, pp. 1545 – 1553.
- Ghista D.N., Sandler H., Vayo W.H. Elastic modulus of the human intact left ventricle – determination and physiological interpretation. *Med. Biol. Eng.*, 1975, v. 13, pp. 151 – 161.
- Anliker M. Direct measurements of the distensibility of heart ventricles. Presented at the 2nd Annual Workshop of the Basic Science Council of the American Heart Association, Ames Research Centre. Moffett Field, Calif., 4-8 th August 1968.
- Lundin, G. Mechanical properties of cardiac muscle. *Acta. Physiol. Scandinav.*, 1944, 7 Suppl., 20, no. 7, p. 1 – 96.
- Ogneva I.V., Shenkman B.S., Lebedev D.V. Transversal stiffness and young's modulus of single fibers from rat soleus muscle probed by atomic force microscopy. *Biophysical Journal*, 2010, v. 98, no. 3, p. 418 – 424.
- Akiyama N., Ohnuki Y., Kunioka Y., Saeki Y., Yamada T. Transverse stiffness of myofibrils of skeletal and cardiac muscles studied by atomic force microscopy. *J. Physiol. Sci.*, 2006, v. 56, pp. 145 – 151.
- Fish D., Orenstein J., Bloom S. Passive stiffness of isolated cardiac and skeletal myocytes in the hamster. *Circ. Res.*, 1984, v. 54, pp. 267 – 276.
- O'Donnell M., Skovoroda A. Prospects for Elasticity Reconstruction in the Heart. *IEEE T. Ultrason. Ferr.*, 2004, v. 51, no. 3, pp. 322 – 328.
- Guccione J.M., McCulloch A.D., Waldman L.K. Passive material properties of intact ventricular myocardium determined from a cylindrical model. *J. Biomech. Eng.*, 1991, v. 113, pp. 42 – 55.
- Guccione J.M., Costa K.D., McCulloch A.D. Finite element stress analysis of left ventricular mechanics in the beating dog heart. *J. Biomech.*, 1994, v. 28, no. 10, pp. 1167 – 1177.
- Verdonk E.D., Wickline S.A., Miller J.G. Anisotropy of ultrasonic velocity and elastic properties in normal human myocardium. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1992, v. 92, no. 6, pp. 3039 – 3050.
- Hoffmeister B.K., Handley S.M., Verdonk E.D., Wickline S.A., Miller J.G. Estimation of the elastic stiffness coefficient C13 of fixed tendon and fixed myocardium. *J. Acoust. Soc. Amer.* 1995, v. 97, no. 5, pp. 3171 – 3176.
- Hoffmeister B.K., Gehr S.E., Miller J.G. Anisotropy of the transverse mode ultrasonic properties of fixed tendon and fixed myocardium. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1996, v. 99, no. 6, pp. 3826 – 3836.
- Hoffmeister B.K., Handley S.M., Wickline S.A., Miller J.G. Ultrasonic determination of the anisotropy of Young's modulus of fixed tendon and fixed myocardium. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1996, v. 100, pp. 3933 – 3940.



20. Demer L.L., Yin F.C.P. Passive biaxial mechanical properties of isolated canine myocardium. *J. Physiol.*, 1983, v. 339, pp. 615 – 630.
21. Huyghe J.M., Van Campen D.H., Arts T., Heethaar R.M. The constitutive behaviour of passive heart muscle tissue. A quasi-linear viscoelastic formulation. *J. Biomechanics*, 1991, v. 24, no. 9, pp. 841 – 849.
22. Van Heuningen R., Rijnsburger W.H., ter Keurs H.E.D.J. Sarcomere length control in striated muscle. *Am. J. Physiol.*, 1982, v. 242, pp. H411 – H420.
23. Van der Loo J.J., Jacot J., Bovendeerd P.H.M. The development in cardiac stiffness in embryonic, neonatal and adult mice evaluated with atomic force microscopy. BMTE 08.45. University of California, San Diego (UCSD), Technical University, Eindhoven (TU/e), Internship 2008, San Diego, 7 p.
24. Berry M.F., Engler A.J., Woo Y.J., Pirolli T.J., Bish L.T., Jayasankar V., Morine K.J., Gardner T.J., Discher D.E., Sweeney H.L. Mesenchymal stem cell injection after myocardial infarction improves myocardial compliance. *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.*, 2006, v. 290, pp. H2196 – H2203.
25. Sherif R., Narinder P., Hani E.N. Standardized static and dynamic evaluation of myocardial tissue properties. *Biomedical Materials*, ГОД???, v. 12, iss. 2, no. 025013. doi: 10.1088/1748 – 605X/aa57a5.
26. Островский Н.В., Челнокова Н.О., Голядкина А.А., Другакова Ю.С., Басенкова Е.В. Биомеханические параметры желудочков сердца человека. Фундаментальные исследования, 2015, № 1 – 10, с. 2070 – 2075.
27. Ogneva I.V., Lebedev D.V., Shenkman B.S. Transversal stiffness and Young's modulus of single fibers from rat soleus muscle probed by atomic force microscopy. *Biophysical Journal*, 2010, v. 98, pp. 418 – 424.
28. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966 г., 635 с.
29. Hasan A., Ragaert K., Swieszkowski W., Selimović S., Paul A., Camci-Unal G., Mofrad M.R., Khademhosseini A. Biomechanical properties of native and tissue engineered heart valve constructs. *J Biomech*, 2014, v. 47, pp. 1949 – 1963. doi: 10.1016/j.jbiomech.2013.09.023.
30. Шмурак М.И., Кучумов А.Г., Воронова Н.О. Анализ гиперупругих моделей для описания поведения мягких тканей организма человека. *Master's Journal*, 2017, № 1, с. 230 – 243.
31. Перцов С.С., Стюрева Г.М., Муслов С.А., Сеницын А.А., Корнеев А.А., Зайцева Н.В. Основы биомеханики для стоматологов. МГМСУ, 2017, 115 с.
32. Иванов Д.В., Фомкина О.А. Определение постоянных для моделей Нео-Гука и Муни-Ривлина по результатам экспериментов на одноосное растяжение. *Математика. Механика*, 2008, № 10, с. 114 – 117.

## References

1. Duch B., Andersen H., Gregerson H. Mechanical properties of the porcine bile duct wall. *BioMed. Engineer. Onl.*, 2004, vol. 3, no. 23, pp. 1 – 8.
2. Muslov S.A., Danilevskaya O.V. Морфологическое и биомеханическое исследование стенки обшчего желчного протока на аутопсином материале [Morphological and biomechanical study of the common bile duct wall on autopsy material]. *Khirurg – Surgeon*, 2007, no. 9, pp. 21 – 25.
3. Abe H., Hayashi K., Sato M. Data book on mechanical properties of living cells, tissues and organs. Tokyo, Springer, 1996, 436 p.
4. Skovoroda A.R. *Zadachi teorii uprugosti v probleme diagnostiki patologij myagkih biologicheskikh tkanej* [Tasks of the theory of elasticity in the problem of diagnostics of pathologies of soft biological tissues]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 232 p.
5. Smolyuk L.T., Prochenko Yu.L. Механические свойства пассивного миокарда: эксперимент и математическая модель [Mechanical properties of passive myocardium: experiment and mathematical model]. *Biofizika — Biophysics*, 2010, vol. 55, no 5, pp. 905 – 909.
6. Mathur A.B., Collinsworth A.M., Reichert W.M., Kraus W.E., Truskey G.A. Endothelial, cardiac muscle and skeletal muscle exhibit different viscous and elastic properties as determined by atomic force microscopy. *Journal of Biomechanics*, 2001, vol. 34, pp. 1545 – 1553.
7. Ghista D.N., Sandler H., Vayo W.H. Elastic modulus of the human intact left ventricle – determination and physiological interpretation. *Med. Biol. Eng.*, 1975, vol. 13, pp. 151 – 161.
8. Anliker M. Direct measurements of the distensibility of heart ventricles. Presented at the 2nd Annual Workshop of the Basic Science Council of the American Heart Association, Ames Research Centre, Moffett Field, Calif., 4 – 8th August 1968.
9. Lundin, G. Mechanical properties of cardiac muscle. *Acta. Physiol. Scandinav.*, 1944, 7 Suppl., 20, no. 7, p. 1 – 96.
10. Ogneva I.V., Shenkman B.S., Lebedev D.V. Transversal stiffness and youngs modulus of single fibers from rat soleus muscle probed by atomic force microscopy. *Biophysical Journal*, 2010, vol. 98, no. 3, pp. 418 – 424.
11. Akiyama N., Ohnuki Y., Kunioka Y., Saeki Y., Yamada T. Transverse stiffness of myofibrils of skeletal and cardiac muscles studied by atomic force microscopy. *J. Physiol. Sci.*, 2006, vol. 56, pp. 145 – 151.
12. Fish D., Orenstein J., Bloom S. Passive stiffness of isolated cardiac and skeletal myocytes in the hamster. *Circ. Res.*, 1984, vol. 54, pp. 267 – 276.
13. O'Donnell M., Skovoroda A. Prospects for elasticity reconstruction in the heart. *IEEE T. Ultrason. Ferr.*, 2004, vol. 51, no. 3, pp. 322 – 328.
14. Guccione J.M., McCulloch A.D., Waldman L.K. Passive material properties of intact ventricular myocardium

- determined from a cylindrical model. *J. Biomech. Eng.*, 1991, vol. 113, pp. 42 – 55.
15. Guccione J.M., Costa K.D., McCulloch A.D. Finite element stress analysis of left ventricular mechanics in the beating dog heart. *J. Biomech.*, 1994, vol. 28, no. 10, pp. 1167 – 1177.
  16. Verdonk E.D., Wickline S.A., Miller J.G. Anisotropy of ultrasonic velocity and elastic properties in normal human myocardium. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1992, vol. 92, no. 6, pp. 3039 – 3050.
  17. Hoffmeister B.K., Handley S.M., Verdonk E.D., Wickline S.A., Miller J.G. Estimation of the elastic stiffness coefficient  $C_{13}$  of fixed tendon and fixed myocardium. *J. Acoust. Soc. Amer.* 1995, vol. 97, no. 5, pp. 3171 – 3176.
  18. Hoffmeister B.K., Gehr S.E., Miller J.G. Anisotropy of the transverse mode ultrasonic properties of fixed tendon and fixed myocardium. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1996, vol. 99, no. 6, pp. 3826 – 3836.
  19. Hoffmeister B.K., Handley S.M., Wickline S.A., Miller J.G. Ultrasonic determination of the anisotropy of Young's modulus of fixed tendon and fixed myocardium. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1996, vol. 100, pp. 3933 – 3940.
  20. Demer L.L., Yin F.C.P. Passive biaxial mechanical properties of isolated canine myocardium. *J. Physiology*, 1983, vol. 339, pp. 615 – 630.
  21. Huyghe J.M., Van Campen D.H., Arts T., Heethaar R.M. The constitutive behaviour of passive heart muscle tissue. A quasi-linear viscoelastic formulation. *J. Biomechanics*, 1991, vol. 24, no. 9, pp. 841 – 849.
  22. Van Heuningen R., Rijnsburger W.H., ter Keurs H.E.D.J. Sarcomere length control in striated muscle. *Am. J. Physiol.*, 1982, vol. 242, pp. H411 – H420.
  23. van der Loo J.J., Jacot J., Bovendeerd P.H.M. The development in cardiac stiffness in embryonic, neonatal and adult mice evaluated with atomic force microscopy. BMTE 08.45. University of California, San Diego (UCSD), Technical University, Eindhoven (TU/e), Internship 2008, San Diego, 7 p.
  24. Berry M.F., Engler A.J., Woo Y.J., Pirolli T.J., Bish L.T., Jayasankar V., Morine K.J., Gardner T.J., Discher D.E., Sweeney H.L. Mesenchymal stem cell injection after myocardial infarction improves myocardial compliance. *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.*, 2006, vol. 290, pp. H2196 – H2203.
  25. Sherif R., Narinder P., Hani E.N. Standardized static and dynamic evaluation of myocardial tissue properties. *Biomedical Materials*, vol. 12, no. 2, 025013, doi: 10.1088/1748 – 605X/aa57a5.
  26. Ostrovskij N.V., Chelnokova N.O., Golyadkina A.A., Drugakova Yu.S., Basenkova E.V. Biomechanicheskie parametry zheludochkov serdca cheloveka [Biomechanical parameters of the human heart ventricles]. *Fundamentalnye issledovaniya — Fundamental research*, 2015, no. 1 – 10, pp. 2070 – 2075.
  27. Ogneva I.V., Lebedev D.V., Shenkman B.S. Transversal stiffness and Young's modulus of single fibers from rat soleus muscle probed by atomic force microscopy. *Biophysical Journal*, 2010, vol. 98, pp. 418 – 424.
  28. Timoshenko S.P., Vojnovskij-Kruger S. *Plastinki i obolochki* [Plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 635 p.
  29. Hasan A., Ragaert K., Swieszkowski W., Selimović S., Paul A., Camci-Unal G., Mofrad M.R., Khademhosseini A. Biomechanical properties of native and tissue engineered heart valve constructs. *J. Biomech.*, 2014, vol. 47, pp. 1949 – 1963, doi: 10.1016/j.jbiomech.2013.09.023.
  30. Shmurak M.I., Kuchumov A.G., Voronova N.O. Analiz giperuprugih modelej dlya opisaniya povedeniya myagkih tkanej organizma cheloveka [Analysis of hyperelastic models for describing the behavior of soft tissues of the human body]. *Master's Journal (Perm National Research Polytechnic University)*, 2017, no. 1, pp. 230 – 243.
  31. Percov S.S., Styureva G.M., Muslov S.A., Sinicyn A.A., Korneev A.A., Zajceva N.V. *Osnovy biomekhaniki dlya stomatologov. Uchebnoe posobie dlya studentov medicinskih vuzov* [Basics of biomechanics for dentists. Study guide for medical students]. Moscow, MSMSU, 2017, 115 p.
  32. Ivanov D.V., Fomkina O.A. Opredelenie postoyannyh dlya modelej Neo-Guka i Muni-Rivlina po rezul'tatam eksperimentov na odnoosnoe rastyazhenie [Determination of constants for the Neo-Hooke and Mooney-Rivlin models from the results of uniaxial tension experiments]. *Matematika. Mekhanika — Maths. Mechanics, Saratov St Univ.*, 2008, no. 10, pp. 114 – 117.

Статья поступила в редакцию — 7.08.2020 г.  
 после доработки — 8.09.2020 г.  
 принята к публикации — 09.09.2020 г.

**Муслов Сергей Александрович** — ФГБОУ ВО Московский государственный медико-стоматологический университет им. А.И. Евдокимова (МГМСУ, 127473, Москва, ул. Делегатская, 20/1), доктор биологических наук, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры нормальной физиологии и медицинской физики. E-mail: muslov@mail.ru.

**Лотков Александр Иванович** — Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук (ИФПМСО РАН, 634055, Томск, просп. Академический, 2/4), профессор, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией материаловедения сплавов с памятью формы. E-mail: lotkov@ispms.ru.

**Арутюнов Сергей Дарчович** — ФГБОУ ВО Московский государственный медико-стоматологический университет им. А.И. Евдокимова (МГМСУ, 127473, Москва, ул. Десятская, 20/1), Заслуженный деятель науки России, Заслуженный врач России, доктор медицинских наук, профессор, заведующий кафедрой пропедевтики стоматологических заболеваний. E-mail: sd.arutyunov@mail.ru.

**Албакова Тамара Магомедбашировна** — ФГБОУ ВО Московский государственный медико-стоматологический университет им. А.И. Евдокимова (МГМСУ, 127473, Москва, ул. Десятская, 20/1), ассистент кафедры кардиологии лечебного факультета. E-mail: tamari\_06@mail.ru.

---

## Calculation of the parameters of mechanical properties of the heart muscle

S. A. Muslov, A. I. Lotkov, S. D. Arutyunov, T. M. Albakova

A review of studies of the mechanical properties of human and animal heart tissues has been performed. Based on literature data, a form of approximating function is found for the dependence of the Young's modulus of the ventricles of the human heart on the magnitude of the deformation. The average values of the Young's modulus and other elastic constants were calculated and compared with the known experimental values. The coefficients  $C_1$  and  $C_2$  of the two-parameter hyperelastic myocardial Mooney-Rivlin model are calculated.

**Keywords:** mechanical properties, Young's modulus, Mooney – Rivlin hyperelastic model, hearth, myocardium.

---

**Muslov Sergei** — A.I. Yevdokimov Moscow State University of Medicine and Dentistry (MSMSU, 20, str. 1, Delegatskaya, Moscow, 127473, Russia), Dr Sci (Biol.), PhD (Phys-Math), professor. E-mail: muslov@mail.ru.

**Lotkov Aleksander Ivanovich** — Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISPMS SB RAS, 2/4, pr. Akademicheskii, Tomsk, 634055, Russia), professor, Dr Sci (Phys-Math), head of the laboratory of materials science of shape memory alloys. E-mail: lotkov@ispms.ru.

**Arutyunov Sergey** — A.I. Yevdokimov Moscow State University of Medicine and Dentistry (MSMSU, 20, str. 1, Delegatskaya, Moscow, 127473, Russia), Dr Sci (Med), professor, head of department. E-mail: sd.arutyunov@mail.ru.

**Albakova Tamara** — A.I. Yevdokimov Moscow State University of Medicine and Dentistry (MSMSU, 20, str. 1, Delegatskaya, Moscow, 127473, Russia), assistant. E-mail: tamari\_06@mail.ru.